**第二章 导数与微分**

**第一节 导数概念**

定义 设函数y = f(x)在点x0的某个领域内有定义，当自变量x在x0处取得增量Δx(点x0 + Δx仍在该邻域内)时，相应地，因变量取得增量Δy = f(x0 + Δx) – f(x0)；如果Δy与Δx之比当Δx🡪0时的极限存在，那么称函数y = f(x)在点x0处**可导**，并称这个极限为函数y = f(x)在点x0处的**导数**，记为f’(x0)，即f’(x0) = limΔx🡪0Δy / Δx = limΔx🡪0(f(x0 + Δx) – f(x0)) /Δx。也可记作y’ | x = x0，dy / dx | x=x0或d(fx) / dx | x = x0。

**第二节 函数的求导法则**

**定理1** 如果函数u = u(x)及v = v(x)都在点x具有导数，那么它们的和，差，积，商(除分母为零的点外)都在点x具有导数，且

1. [u(x) ± v(x)]’ = u’(x) ± v’(x)；
2. [u(x) \* v(x)]’ = u’(x)v(x) + u(x)v’(x)；
3. [u(x) / v(x)]’ = (u’(x)v(x) – u(x)v’(x)) / v2(x) (v(x) ≠ 0)

**定理2** 如果函数x = f(x)在区间Iy内单调，可导且f’(y) ≠ 0，那么它的反函数y = f-1(x)在区间Ix = {x|x = f(y), y ∈ Iy}内也可导，且[f-1(x)]’ = 1 / f’(y) 或 dy / dx = 1 / (dx / dy)。

**定理3** 如果u = g(x)在点x可导，而y = f(u)在点u = g(x)可导，那么复合函数 y = f[ g(x) ]在点x可导，且其导数为dy / dx = f’(u) \* g’(x) 或 dy / dx = dy / du \* du / dx。

**第三节 高阶导数**

d/dt(ds/dt)或(s’)’叫做s对t的二阶导数，记作d2s / dt2 或 s’’(t)。

即y’’ = (y’)’或d2y / dx2 = d/dx(dy/dx)

类似的，二阶导数的导数，叫做三阶导数，二阶及二阶以上的导数统称**高阶导数**。

**莱布尼茨公式**

(uv)(n) = u(n) + nu(n-1)v’ + … +n(n-1) … n(n – k + 1) / k! \* u(n - k)vk + … + u0vn

(uv)(n) = ∑k=0nCnku(n - k)v(k)

**第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率**

y = sinx， y = lnx + 1等称为**显函数**；x + y3 - 1 = 0称为**隐函数**。

设x = x(t)及 y = y(t)都是可导函数，而变量x与y间存在某种关系，从而变化率dx / dt与dy /dt 间也存在一定关系。这两个互相依赖的变化率称为**相关变化率**。

**第五节 函数的微分**

定义 设函数y = f(x)在某区间内有定义，x0及x0 + Δx在这区间内，如果函数的增量Δy = f(x0 + Δx) – f(x0)可表示为Δy = AΔx + o(Δx)，其中A是不依赖于Δx的常亮，那么称函数y = f(x)在点x0是可微的，而AΔx叫做函数y = f(x)在点x0相应于自变量增量Δx的**微分**，记作dy，即dy = AΔx。